

実験的モード解析における 剛体モード強調と回転自由度 の同定



第1研究部SDグループ

古沢政生



第3技術部

富永隆史

概要

本論文は実験的モード解析のための、拘束方程式と最小2乗法を利用した剛体モード強調法の理論を提案したものである。また、いくつかの応用例とその利点、特に回転自由度の同定について論じ、その利用法を示す実例を提示する。尚、本稿は去る'86年2月3日より8日まで米国ロサンゼルスで開催された、第4回国際モーダルアナリシス会議(I M A C)にて発表した論文の全文である。

記号

ℓ : 節点の数

n : 自由度の数 (3 ℓ)

[p] : 測定された並進方向モードベクトル ($n \times 1$)

[ϕ] : 強調された並進方向モードベクトル ($n \times 1$)

[ϕ] : 座標原点の独立自由度ベクトル (6×1)

[C] : 剛体の拘束方程式の係数マトリクス ($n \times 6$)

[w] : 重み係数対角マトリクス ($n \times n$)

[ϵ] : 誤差ベクトル, ($n \times 1$)

E : 誤差の2乗和

[A] : 係数マトリクス ($[A] = [C]^T [w] [C]$)
(6×6)

[R] : 右辺ベクトル ($[R] = [C]^T [w] [p]$)
(6×1)

x_ϕ : [ϕ] の x 方向並進成分

y_ϕ : [ϕ] の y 方向並進成分

z_ϕ : [ϕ] の z 方向並進成分

$x\theta$: [ϕ] の x 軸まわり回転成分

$y\theta$: [ϕ] の y 軸まわり回転成分

$z\theta$: [ϕ] の z 軸まわり回転成分

1. はじめに

実験的モード解析技術は、近年目覚ましい発展を遂げ、動的問題を解決するための一手法として不動の地位を得る迄に到了。しかし、一方では依然として解決していない技術的問題が残っており、モード解析によって得られたモーダルパラメータをもとに、構造変更シミュレーションやシステムアナリシスを行なう際の大きな障害となっている。

さて、その問題とは以下の 2 点に代表されよう。

1) 対象とする周波数範囲外のモード、すなわち低周波数域の剛体モード(慣性拘束)と、高周波数域の剩余剛性を把握することが困難である。

特に、シミュレーションには欠かすことのできない剛体モードは、実験的モード解析から得られない⁽¹⁾。

2) 回転自由度の応答を測定する実用的なトランステューサがまだ出現していない。また、並

進自由度の応答から、これを推定することも容易ではない。⁽²⁾

1)の問題のうち、剩余剛性についてはとりあえず高次のモードをいくつか加えることで解決できる。また剛体モードについては、構造を完全に自由支持した場合に固有振動数が0となるため、モード解析が不可能となるのであって、実験では幸いにもラバーや空気バネで構造を支持するため、固有振動数は0とならない。したがって、低周波数域まで正確な周波数応答関数と、強力なカーブフィット技術があれば剛体モードの測定は可能である。ただし、振動ピックアップの横感度や、荒い低周波数分解能などによって歪んだ剛体モードを修正する必要が生じてくる。

次に2)の問題については、部品と部品が一点で結合され、この点でモーメントが伝達される場合に特に重要となる。通常、設計者はこのモーメントによって部品がこわれないように、剛に設計するものである。したがって、この部分を局部的に剛体と仮定し、剛体モードに強調することで回転自由度成分を取り出すことができる。

以上のような基本的考え方に基づいて、本報では、剛体の拘束方程式と最小2乗法を利用した、簡便で実用的な「剛体モード強調法」を提案するものである。

2. 理論的背景

剛体の拘束方程式は次のように表される。

$$[\psi] = [C] [\phi] \quad (1)$$

(n \times 1) (n \times 6) (6 \times 1)

ただし

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & C_{1z} & -C_{1y} \\ 0 & 1 & 0 & -C_{1z} & 0 & C_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & C_{1y} & -C_{1x} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad [\phi] = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ x\theta \\ y\theta \\ z\theta \end{bmatrix}$$

測定された振動モードの誤差ベクトルは

$$[\varepsilon] = [p] - [\psi] \quad (2)$$

重みづけされた2乗誤差の総和は

$$E = [\varepsilon]^T [w] [\varepsilon] \quad (3)$$

(2)式を(3)式を代入して

$$\begin{aligned} E &= ([p] - [\psi])^T [w] ([p] - [\psi]) \\ &= [p]^T [w] [p] - 2 [\psi]^T [w] [p] + [\psi]^T [w] [\psi] \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式に(1)式を代入して

$$\begin{aligned} E &= [p]^T [w] [p] - 2 [\phi]^T [C]^T [w] [p] \\ &\quad + [\phi]^T [C]^T [w] [C] [\phi] \end{aligned} \quad (5)$$

Eを最小化するために、(5)式を $[\phi]$ で偏微分して0とおく。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial [\phi]} &= -2 [C]^T [w] [p] + 2 [C]^T [w] [C] [\phi] \\ &= [0] \\ [C]^T [w] [C] [\phi] &= [C]^T [w] [p] \end{aligned} \quad (6)$$

$[A] = [C]^T [w] [C]$, $[R] = [C]^T [w] [p]$ とおくと
(6)式は

$$[A] [\phi] = [R] \quad (6 \times 6) (6 \times 1) (6 \times 1) \quad (7)$$

となる。

6元連立方程式(7)を解いて、剛体の独立自由度ベクトル $[\phi]$ が求められる。回転自由度が必要な場合は、このベクトルの下半分を取り出せばよい。

次に、測定された点の強調された剛体モードが必要な場合は、 $[\phi]$ を(1)式に代入することで求められる。

ところで(1)式は次のように変形しておくと便利である。

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & y_r & z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1x} & C_{1y} & C_{1z} \\ C_{2x} & C_{2y} & C_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{rx} & C_{ry} & C_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z\theta & -y\theta \\ -z\theta & 0 & x\theta \\ y\theta & -x\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、(8)式左辺は強調された並進方向モードマトリクス($\ell \times 3$)、右辺第一項は並進方向の独立自由度のみからなるマトリクス($\ell \times 3$)、右辺第二項の係数マトリクスは座標マトリクス($\ell \times 3$)、となっている。

3. ソフトウェア

SDRC/MODAL-PLUSを中心とした実験的モード解析の流れを図1に示す。このうちIMDOFは、著者が開発した強力なカーブフィットソフトウェアであり、周波数領域で250節点、40モードまでを同時に計算する能力を有している。

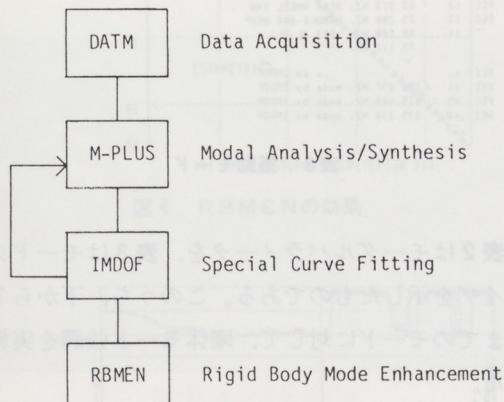


図1 データ処理の流れ

RBMENが、本報で述べている剛体モード強調法のソフトウェアである。(7)式の解法にはガウスの消去法を採用した。また、MODAL-PLUS、IMDOFとの会話をよくし、計算に使用する節点の編集や、重み係数の最適化などに工夫をこらした。

4. 応用例 1

図2、図3は二輪車のシャーシ加振テストの一例を示したものである。この例では、広い周波数範囲(0~800Hz)を必要としたため、図2に示す通常の周波数応答関数(FRF)測定には、電磁

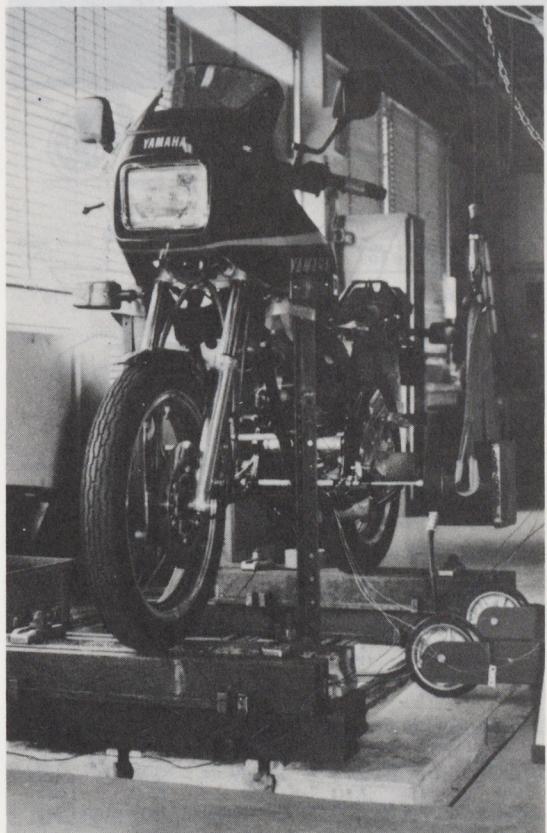


図2 弾性モード加振テスト

加振器とピエゾ式加速度ピックアップを、低周波数域FRF測定には、油圧加振器と歪ゲージ式加速度ピックアップを使用した。

また、低周波数域FRF測定については、図3に見るように数少ない測定点で代表し、すべての点を測定した訳ではない。これは、剛体モード強調によって、一度独立自由度が求まれば、(8)式によって任意の従属自由度を創成することができるからである。これにより、測定時間の大巾な短縮が可能となった。

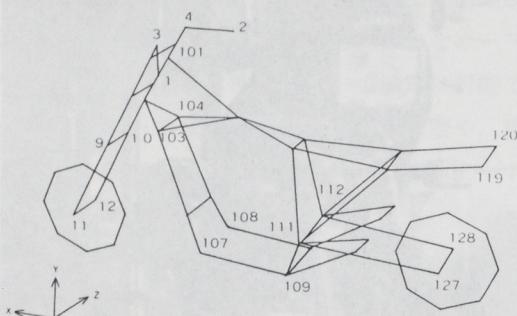
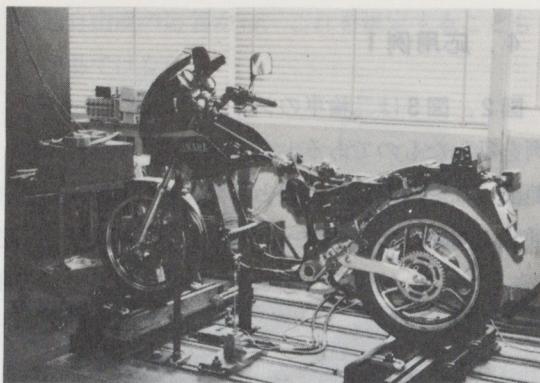


図3 剛体モード加振テスト
(図中数字は測定点を示す)

```

! MODE NUMBER = 2 ! !
! FREQUENCY = 2.901 (Hz) !
! DAMPING = 0.1817 !
! MODAL MASS = 2.192 !
! REFERENCE = 119X !
+-----+-----+
FORE/AFT
+-----+-----+
ORD OBSERVED COMPUTED DIFFERENCES PERCENT WEIGHTING
      SHAPE      SHAPE OBSD - COMP DIFF FACTOR
+-----+-----+
  1X 254.7 261.7 -6.987 2.67 1.00
  1Y 5.886 7.918 -2.032 25.67 1.00
  1Z 40.11 28.85 11.27 39.86 1.00
+-----+-----+
  3X 262.6 260.6 1.959 0.75 1.00
  3Y 3.794 10.39 -6.592 63.47 1.00
  3Z 12.54 21.80 -9.269 42.51 1.00
+-----+-----+
  4X 255.1 259.9 -4.827 1.86 1.00
  4Y 9.849 5.552 3.497 62.48 1.00
  4Z 22.63 21.80 0.8264
+-----+-----+
      258.4
+-----+-----+
  5X 266.5 ---.9 6.267 2.41 1.00
  5Y 19.14 11.82 7.328 62.02 1.00
  5Z 20.64 17.73 2.913 16.43 1.00
+-----+-----+
  S. 153.3 153.2 6.931 4.52 (n = 35)

```

表1 剛体モード強調例

表1は、RB MENの実行例である。X方向に比較してY, Z方向のデータに誤差が大きいのは、

加速度ピックアップの横感度に起因するものと考えられる。合計26のモードシェイプ係数を使って、実行値誤差4.52%とかなり良い剛体モード強調を行なっていることが分かる。

LABEL	FREQ	DAMPING	AMPLITUDE	PHASE	REF	RES	MODE	
1	1.750	0.09252	579.9	1.571	1892*	12+		
2	2.901	0.18170	919.7	1.571	119X*	111X*		
3	7.647	0.05187	1347	-1.571	119X*	1202*	3	
4	10.970	0.09728	6395	1.571	187Y*	119Y*	4	
5	14.011	0.12880	3460	-1.571	187Y	1X*	5	
6	16.756	0.08228	2.0938E+04	1.571	1892*	1082*	6	
7	17.372	0.06308	5780	-1.571	1892*	187Y	7	
8	19.409	0.05917	3760	1.571	187Y*	119Z*	8	
9	25.754	0.06333	1.4137E+04	-1.571	1892*	144Z*	9	
10	42.986	0.06308	1.4051E+04	1.571	187Y*	120Y*	10	
11	59.366	0.06226	4.0418E+04	1.571	187Y	142Z*	11	
12	63.913	0.04855	4.7375E+04	-1.571	1892*	139Z*	12	
13	75.200	0.05010	6.0795E+04	1.571	187Y*	1X*	13	
14	80.500	0.03655	1.2198E+05	1.571	187Y*	1Z*		
	85.117	0.05308	1.0564E+05	-1.571	100*			
	537	0.07724	9.7829E+04	1	1			
		77065	1.6007E+04					
42					1.571	187Y*	41	
43	776.965	-	-	-	1.571	187Y*	106Z*	42
44	796.657	-	-	-	1.571	187Y*	107Y*	43
45	825.448	0.01339	1.5595E+06	1.571	187Y*	123Z*	44	
46	835.230	0.01287	1.5592E+06	-1.571	187Y	124Z*	45	

表2 モーダルパラメータ

FS	S RECORDS	IN USE OF	68 AVAILABLE
REC	1	1 750 Hz. LOWER CTR ROLL	
REC	2	2 901 Hz. FORE/AFT	
REC	3	7 647 Hz. YAW	
REC	4	10 970 Hz. BOUNCE	
REC	5	14 011 Hz. PITCH	
REC	6	16 756 Hz. UPPER CTR ROLL (STEER IN PHASE)	Rigid Body Modes
REC	7	17 372 Hz. UPPER CTR ROLL (STEER OUT OF PHASE)	1
REC	8	19 489 Hz. FRONT AXIS FORE/AFT	
REC	9	25 754 Hz. LATERAL TWIST	Flexible Modes
REC	10	42 936 Hz. SWING ARM PITCH	
REC	11	59 366 Hz. REAR WHEEL ROLL	
REC	12	63 913 Hz. REAR WHEEL YAW	
REC	13	75 260 Hz. HANDLE-BAR BEND	
REC	14	80 580 Hz. LEFT AL-PI	
		85 117 Hz. PILOT	
REC	44	796 657 Hz. mode by IMDOF	
FEC	45	825 448 Hz. mode by IMDOF	
FEC	46	835 230 Hz. mode by IMDOF	

表3 振動モード

表2はモーダルパラメータを、表3はモードシェイプを示したものである。このうち、下から7つまでのモードに対して、剛体モード強調を実施した。

図4はこの7つのモードのMACが、剛体モード強調によって改善されていることを示したものである。図5は、これらのモーダルパラメータよりシンセシスしたFRFを示す。剩余項を一切考慮していないにもかかわらず、10~600Hzの広範囲に渡って良好なフィットを示している。

MODAL ASSURANCE CRITERION							
MODE NO.	1	2	3	4	5	6	7
1	100	0	1	0	0	0	0
2	100	0	1	0	0	0	0
3	100	0	0	0	0	0	0
4	100	0	0	0	0	0	0
5	[SYMMETRIC]	100	0	2	0	0	0
6	100	0	0	0	0	0	0
7	100	0	0	0	0	0	0

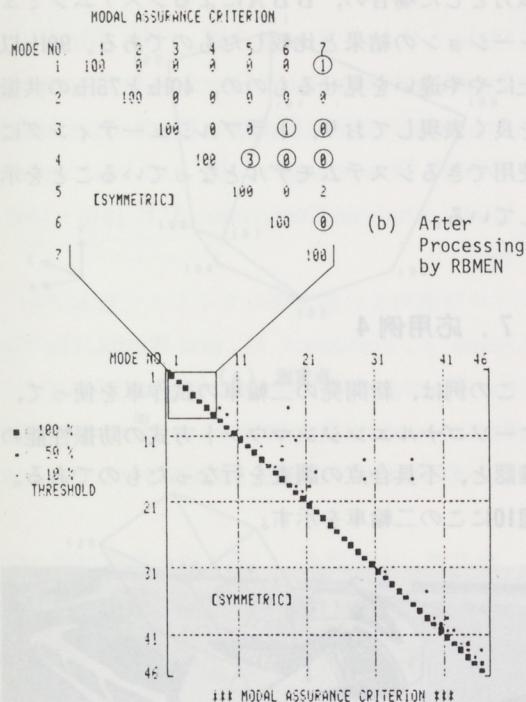


図4 RBMENの効果

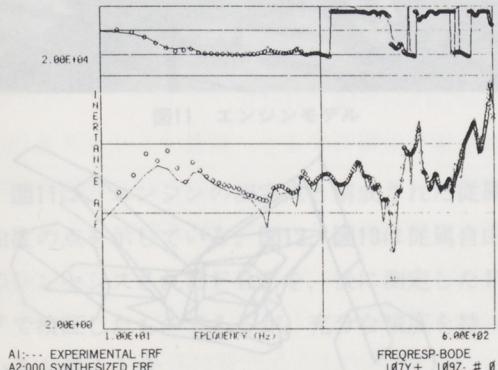


図5 剰余項なしのシンセシス結果

5. 應用例 2

図6は二輪車のエンジンマウント方法の研究開発に使用したコンポーネントモデルを示している。この例では、シャーシの低周波数域に剛体モード強調を実施している。

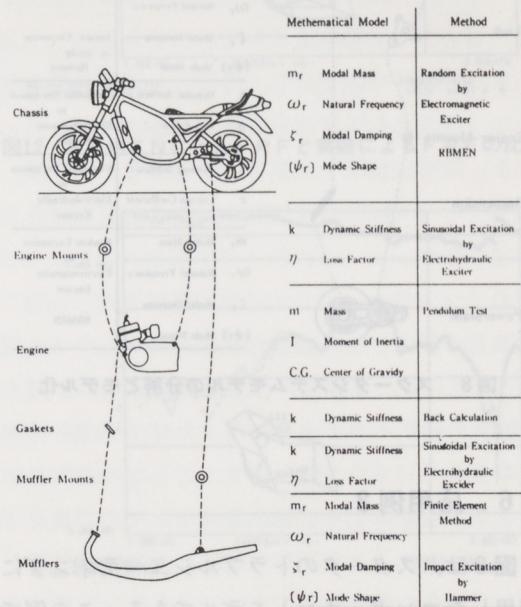


図6 2輪車システムモデルの分解とモデル化

ビルディングブロックアプローチ (BBA) によるシステムシミュレーションの結果と実験結果を比較したものが図7である。加振力は二気筒エンジンの不釣合一次慣性偶力のみとしているが、非常に良い一致が得られている。

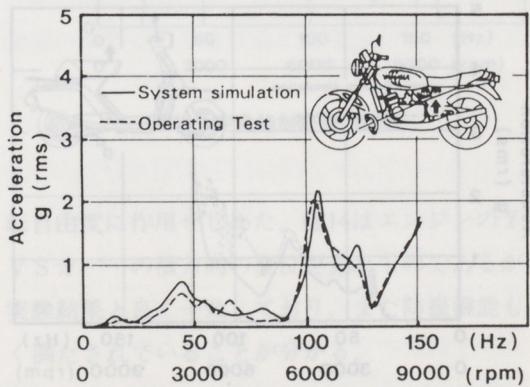


図7 定常強制応答の比較

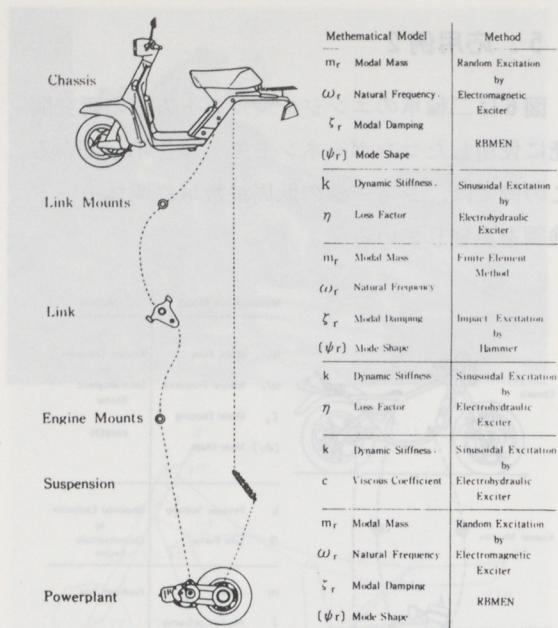


図8 スクータシステムモデルの分解とモデル化

6. 応用例 3

図8は、スクータのトラブルシューティングに使用したコンポーネントモデルである。この例では、シャーシとパワープラントがサスペンションとリンクで結合されるが、リンクに捩りゴムを使用しているため、回転自由度が必要となる。また、システムモデルの加振力となる、単気筒エンジンの不釣合一次慣性力が作用する点、すなわちクラシクシャフトの中心に加速度ピックアップを取り附けることは、事実上不可能である。

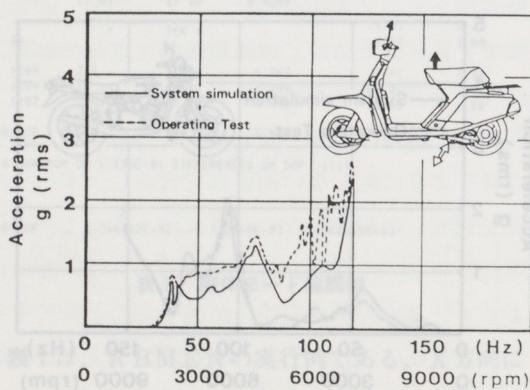


図9 定常強制応答の比較

そこでRBLENは、シャーシのリンク結合部の回転自由度と、パワープラントのクラシクシャフト中心の並進自由度を創成するために使用された。さらに、シャーシの低周波数域に剛体モード強調が実施されている。

図9は、不釣合一次慣性力のみをスクータの加振力とした場合の、BBAによるシステムシミュレーションの結果と比較したものである。90Hz以上にやや違いを見せるものの、40Hzと75Hzの共振を良く表現しており、トラブルシューティングに使用できるシステムモデルとなっていることを示している。

7. 応用例 4

この例は、新開発の二輪車の試作車を使って、オーソガナルエンジンマウント方式の防振性能の確認と、不具合点の調査を行なったものである。図10にこの二輪車を示す。

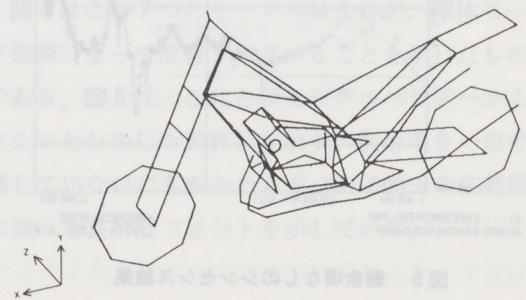
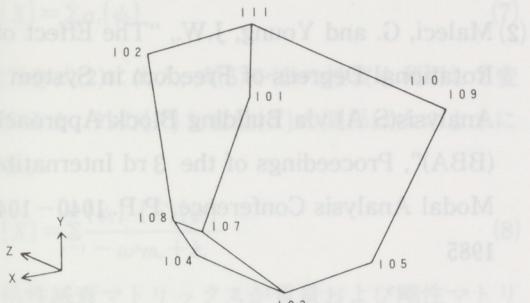
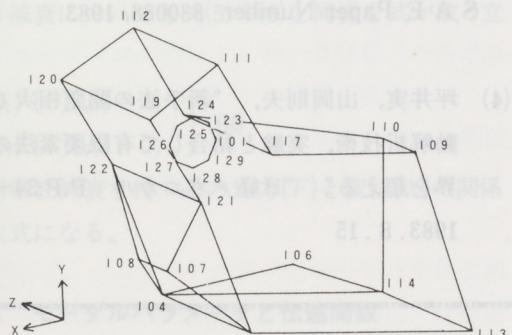


図10 二輪車

システムモデルは全体車輌の加振テスト、実験的モード解析により求めたが、エンジンは使用周波数域ではほどと剛体としてふるまうため、0~300HzのエンジンのモードすべてにRBMENTを適用し、剛体モード強調と回転自由度の創成を行なった。



(a) 測定点



(b) 創成点 (従属自由度)

図11 エンジンモデル

図11は、エンジンの測定点と創成された従属自由度の点を示している。図12、図13は従属自由度のシンセシスされたFRFを、後に測定したFRFで検証したものであるが、充分な精度を持っていふと言えよう。

この、一つのコンポーネントによるシステムモデルを使って、システムシミュレーションを行なった。加振力は応用例2と同様に二気筒エンジンの不釣合一次慣性偶力とし、これをエンジンの回

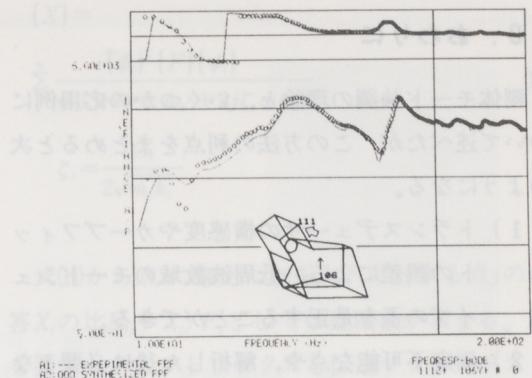


図12 RBMENTによるFRFと実験によるFRFの比較

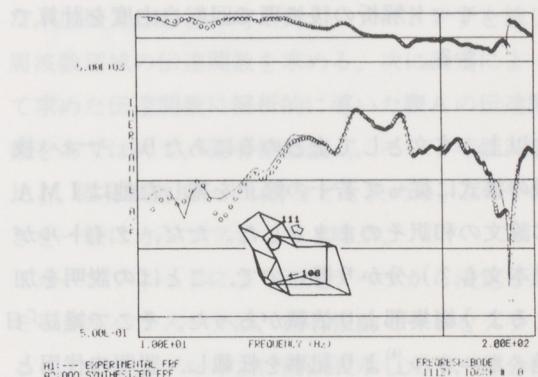


図13 RBMENTによるFRFと実験によるFRFの比較

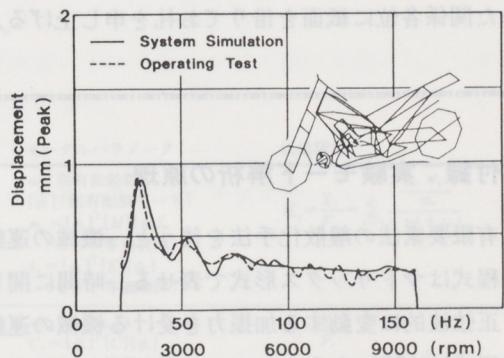


図14 定常強制応答の比較

転自由度に作用せしめた。図14はエンジンのYPVSカバーの横方向の変位を見たものであるが、実験結果と良く一致しており、また防振機能もよく満たされていることが分かる。

8. おわりに

剛体モード強調の理論と、いくつかの応用例について述べたが、この方法の利点をまとめると次のようになる。

- 1) トランステューサの横感度やカーブフィットの誤差による、低周波数域のモードシェイプの歪を是正することができる。
- 2) 測定不可能な点や、解析した後に必要となった点を従属自由度として創成できる。
- 3) 特別な装置や複雑な手順を必要とせずに、モード解析の後処理で回転自由度を計算できる。

以上、本文としてまとめにあたり、ヤマハ技報の書式に従って若干の修正を施した他は IMA C 論文の和訳そのままとした。ただ、タイトルが（本文も？）分かり難いので、ことばの説明を加えるよう編集部より依頼があった。そこで雑誌「日経メカニカル」⁴⁾より記事を転載し、説明の代用とした。著者の悪文に加えていっそう分かり難くなつたような気もするが御容赦頂きたい。御協力頂いた関係各位に紙面を借りてお札を申し上げる。

付録：実験モード解析の原理

有限要素法の離散化手法を使うと、機械の運動方程式はマトリックス形式で表せる。時間に関して正弦波的に変動する加振力を受ける機械の運動方程式は次式になる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + j[D]\{x\} + [K]\{x\} = \{F\} e^{j\omega t} \quad (1)$$

式(1)で、 $[M]$, $[C]$, $[D]$, $[K]$ は質量、粘性減衰、構造減衰、剛性マトリックスである。 $\{x\}$, $\{F\}$ は変位、荷重のベクトルである。

式(1)で減衰がない場合を考えると

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} e^{j\omega t} \quad (2)$$

参考文献

- (1) Lamontia, M.A., "On The Determination and Use of Residual Flexibilities, Inertia Restraints, and Rigid-Body Modes", Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, P.P. 153-159, 1982
- (2) Maleci, G. and Young, J.W., "The Effect of Rotational Degrees of Freedom in System Analysis(S A) via Building Block Approach (BBA)", Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, P.P. 1040-1045, 1985
- (3) Seino, T., Furusawa, M., and Ikuma, H., "On the Theory of Orthogonal Engine Mount System and its Application to Motorcycles", S A E Paper Number 830088, 1983
- (4) 坪井実, 山岡則夫, "新手法の開発相次ぐ振動解析技術, 実験と結合して有限要素法の限界を超える" "日経メカニカル" P.P.34-43, 1983.8.15

式(2)の系について固有振動数と固有振動モードを求めるには、次式の固有値解析を行う。

$$-\omega^2[M]\{x\} + [K]\{x\} = 0 \quad (3)$$

式(3)を固有値解析すると、質量マトリックス $[M]$ や剛性マトリックス $[K]$ の次元 n と同じ数の固有振動数 ω_i と固有振動モード $\{\psi_i\}$ が求まる。

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n \\ \{x\} &= \{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_i\}, \dots, \{\psi_n\} \end{aligned} \quad \left. \right\} (4)$$

$\{\psi_i\}$ には次式のような性質がある。

$$\{\psi_i\}^\top [M]\{\psi_i\} = 0 \quad \left. \right\} (5)$$

$$\{\psi_i\}^\top [K]\{\psi_i\} = m_i \quad \left. \right\} (6)$$

$$\{\psi_i\}^\top [K]\{\psi_i\} = k_i \quad \left. \right\} (6)$$

式(5)や(6)の添字Tは行列の転置（行と列を入れ替える）を意味する。式(5), (6)で得られた m_i を i 次のモード等価質量, K_i を i 次のモード等価剛性という。 ω_i , $\{\psi_i\}$, m_i , k_i をモーダルパラメータという。 $\{x\} = \{X\} e^{j\omega t}$ とおくと, $\{X\}$ は固有振動モード $\{\psi_i\}$ の重ね合わせとして表現できる。

$$\{X\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \{\psi_i\} \quad (7)$$

式(7)を式(2)に代入, 式(5)や(6)の性質を利用して変形すると, 外力 $\{F\}$ と変位 $\{X\}$ の関係は次のようになる。

$$\{X\} = \sum_{i=1}^n \frac{\{\psi_i\}^T \{F\} \{\psi_i\}}{-\omega^2 m_i + k_i} \quad (8)$$

粘性減衰マトリックスが質量および剛性マトリックスの線形和

$$[C] = a[M] + b[K] \quad (9)$$

として表せる場合を比例粘性減衰という。この場合は減衰についても式(5)や(6)と同様な式が成り立つ。

$$\begin{cases} \{\psi_i\}^T [C] \{\psi_i\} = 0 \\ \{\psi_i\}^T [C] \{\psi_i\} = C_i \end{cases} \quad (10)$$

比例粘性減衰を持つ系の外力 $\{F\}$ と変位 $\{X\}$ の関係は次式になる。

$$\{X\} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\{\psi_i\}^T \{F\} \{\psi_i\}}{m_i (-\omega^2 + \omega_i^2 + 2j\zeta_i \omega \omega_i)} \quad (11)$$

$$\zeta_i = \frac{C_i}{2\sqrt{m_i k_i}}$$

式(11)から点 i に加えた加振力 F_i に対する点 j の応答 X_j の比 $H_{ij} = X_j / F_i$ として伝達関数が求まる。 H_{ij} を要素とするマトリックスを伝達マトリックスという。表Aに種々の減衰に対する伝達関数を示す。

実験モード解析は, 最初に加振実験を行って得た, 加振力と応答の時系列データにFFTを施し, 周波数領域の伝達関数を求める。次に測定によって求めた伝達関数に解析的に導いた表Aの伝達関数をあてはめて, 固有振動数 ω_i , モード等価減衰比 ζ_i , 固有振動モード $\{\psi_i\}$ などを決める。この手順を一般にカーブフィットと呼ぶ。

カーブフィットにより測定データから決定したモーダルパラメータは, 固有振動モードをグラフィックディスプレイ上に動画表示したり, 部分構造をコンピュータ内で組み立てて機械全体の振動特性を予測する動特性シミュレーションに応用する。

表A モーダルパラメータと伝達関数

減衰	運動方程式	固有値解析の基礎式	モーダルパラメータ	伝達関数
無減衰	$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$	$(-\omega^2[M] + [K])\{x\} = \{0\}$	ω_i (固有振動数) $\{\psi_i\}$ (固有振動モード) $m_i = \{\psi_i\}^T [M] \{\psi_i\}$ (モード等価質量) $k_i = \{\psi_i\}^T [K] \{\psi_i\}$ (モード等価剛性)	$H_{ij} = \frac{X_j}{F_i} = \sum_{r=1}^n \frac{m_r}{-\omega^2 + \omega_r^2 + j2\zeta_r \omega \omega_r}$
比例粘性減衰	$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$ $[C] = a[M] + b[K]$	$(-\omega^2[M] + [K])\{x\} = \{0\}$	ω_i , $\{\psi_i\}$, m_i , k_i $C_i = \{\psi_i\}^T [C] \{\psi_i\}$ (モード等価減衰)	$H_{ij} = \frac{X_j}{F_i} = \sum_{r=1}^n \frac{m_r}{-\omega^2 + \omega_r^2 + j2\zeta_r \omega \omega_r}$
非比例粘性減衰	$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$ $[C] = \{a\} [M] + \{b\} [K]$	$(P[A] + [B])\{y\} = \{0\}$ $[A] = \begin{bmatrix} [C][M] \\ [M][0] \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix}$ $\{y\} = \begin{bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{bmatrix}$	S_r (複素固有値) $\{\psi_r\}$ (複素固有振動モード) $a_r = \{\psi_r\}^T [A] \{\psi_r\}$ $b_r = \{\psi_r\}^T [B] \{\psi_r\}$	$H_{ij} = \frac{X_j}{F_i} = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\frac{\omega_r}{a_r}}{S - S_r} + \frac{\frac{\omega_r^* \psi_r^*}{a_r^*}}{S - S_r^*} \right\}$ *は複素系 $\{\psi\}$ は $\{\psi\}$ の下半分のベクトル
構造減衰	$[M]\{\ddot{x}\} + j[D]\{x\} + [K]\{x\} = \{f\}$	$(-\omega^2[M] + [K] + j[D])\{x\} = \{0\}$	ω_i $\{\psi_i\}$ (複素固有振動モード) $m_i = \{\psi_i\}^T [M] \{\psi_i\}$ $k_i (1 + jg_i)$ $= \{\psi_i\}^T ([K] + j[D]) \{\psi_i\}$	$H_{ij} = \frac{X_j}{F_i} = \sum_{r=1}^n \frac{m_r}{-\omega^2 + \omega_r^2 + jg_r \omega_r^2}$